STOWARZYSZENIE DYREKTORÓW
I NAUCZYCIELI TWÓRCZYCH
I AKTYWNYCH SZKÓŁ ZAWODOWYCH

ul. Powstańców Wielkopolskich 63
85-090 Bydgoszcz
NIP: 967-00-54-505

STOWARZYSZENIE DYREKTORÓW I NAUCZYCIELI TWÓRCZYCH I AKTYWNYCH SZKÓŁ ZAWODOWYCH

KONKURS MATEMATYCZNY EUKLIDES

XIX KONKURS MATEMATYCZNY „EUKLIDES"

Zadania na etap szkolny

<u>Uwaga! Nie upubliczniać przed 10 grudnia 2018 r.:</u>

1. Liczby −2 oraz 4 są miejscami zerowymi funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$. Do wykresu funkcji należy punkt P = (2, 4).
   a) wyznacz współczynniki a, b, c funkcji
   b) dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g, gdzie $g(x) = x + 2$.

2. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 2-2x, & x \in (-3, 1 > \\ x-1, & x \in (1, 5 > \end{cases}$. Sporządź wykres funkcji $g(x) = -f(x)$ i podaj jej zbiór wartości. Oblicz wartość funkcji $g(\sqrt{3}+2)$.

3. Które spośród liczb p, q, r spełniają jednocześnie obie nierówności:
   $(1-x)^2 \leq (x-1)(1+x) - 2$ oraz $x - \sqrt{3} \geq 1 + \sqrt{3}x$,
   jeśli $p = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $q = 4 \cdot 2^{-2} + 9 \cdot 3^{-1}$, $r = 20^{-1} \cdot (0{,}2)^{-2} - \frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{-1}$.

4. Wykaż, że:
   a) reszta z dzielenia przez 8 sumy kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest równa 2.
   b) liczba $8^{n+2} - 8^{n+1} + 9 \cdot 8^n$ jest podzielna przez 13.

5. Trzy grupy rybaków złowiły razem 113 ryb. Każdy rybak z pierwszej grupy złowił 4 ryby, z drugiej grupy 5 ryb, a z trzeciej grupy 13 ryb. Razem było 16 rybaków. Oblicz, ilu rybaków było w każdej grupie.

6. Dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych $x + 2y + 5 = 0$ oraz $5x - 2y - 11 = 0$. Punkt $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ jest środkiem symetrii tego równoległoboku. Wyznacz równania prostych, w których zawierają się pozostałe boki tej figury.

7. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 4cm oraz 6cm. Oblicz stosunek długości odcinków, na jakie symetralna przeciwprostokątnej podzieliła dłuższą przyprostokątną tego trójkąta.

8. Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie $|AB| = 48$. Wysokość AD dzieli pole trójkąta ABC w stosunku 1:3. Oblicz pole mniejszego z powstałych trójkątów.

9. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest dwa razy dłuższą od jednej z przyprostokątnych. Wyznacz stosunek pola kola wpisanego w ten trójkąt do pola koła opisanego na tym trójkącie.

10. Niech α będzie jednym z kątów ostrych trójkąta prostokątnego.
    a) uzasadnij, że spełniona jest nierówność: $sin\alpha - tg\alpha < 0$,
    b) oblicz wartość wyrażenia $cos^3\alpha + cos\alpha \cdot sin^2\alpha$ wiedząc, że $sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

<u>Uwaga:</u>

- Komisja wybiera 5 spośród 10 zadań przesłanych do przeprowadzenia etapu.
- Rozwiązując zadania można korzystać z kalkulatorów (oprócz funkcyjnych), nie można korzystać z tablic.
- Czas rozwiązywania zadań wynosi 120 minut, od momentu ich przekazania.
- **Za każde zadanie można otrzymać od 0 do 6 punktów.**
- Uczniowie, którzy uzyskają powyżej 16 punktów kwalifikują się do etapu rejonowego.

Za komisję główną